

PROGRAMAS PARA LA ESTIMULACIÓN DE LAS HABILIDADES DE LA INTELIGENCIA

PROGRESINT / 25

CARLOS YUSTE HERNANZ / JOSE LUIS GALVE MANZANO

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO Y
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

E.S.O.
ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

NIVEL / 4



ESTRATEGIAS DE CÁLCULO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El presente cuaderno 25 del PROGRESINT, NIVEL 4, sigue un esquema claramente paralelo con el correspondiente número 17 del nivel anterior, manteniendo el mismo esquema fundamental de ideas y trabajo, pero continuando con los procesos mentales involucrados a un mayor nivel de complejidad y utilizando también números decimales y fraccionarios.

La automatización del cálculo, la adquisición de estrategias que lo hagan más eficaz, así como estrategias para resolver problemas y seriaciones numéricas, son tareas importantes del desarrollo mental lógico y numérico, constituyendo los objetivos fundamentales de este cuaderno.

En primer lugar se trabaja el cálculo mental con el objetivo de hacer comprender al joven algunas **propiedades de la suma como son la conmutativa y la asociativa**, y sobre todo elicitándole estrategias **derivadas de estas propiedades**. Por ejemplo buscando determinadas agrupaciones que faciliten la rapidez y seguridad en el cálculo. De ninguna manera se pretende enseñar a realizar las operaciones básicas y menos aún las formas habituales de presentación de estas operaciones. Asimismo, a lo largo del cuaderno se intercalan ejercicios-juego de consolidación y refuerzo sobre todo para las estrategias de cálculo que se practican y con la finalidad de que las tareas resulten más motivantes para el alumno.

En segundo lugar, se pretende enseñar a seriar números lógicamente y a hacer representaciones que ayuden a comprender su secuenciación. Además de las clásicas series con números se trabaja también con series de fichas de dominó. No se pretende únicamente hacer ejercicios de seriaciones lógicas, sino entrenar en la **comprensión de las reglas, ciclos o fórmulas que hagan comprensible este tipo de problemas lógicos**. Por ello, además de la complementación de series, se enseña a explicitar las fórmulas, a descubrir tanto las seriaciones como su ciclos e incluso a inventar series de acuerdo con un determinado período.

En tercer lugar está la resolución de problemas numérico-verbales **utilizando las cuatro operaciones fundamentales, con números enteros, fraccionarios y decimales**. Estos problemas son semejantes a los que en realidad tienen los/as jóvenes en sus procesos de aprendizaje aritmético. Pero tratamos de reafirmar estrategias generales, que les deben servir para abordar problemas incluso muy distintos a los que aquí se plantean. Describimos a continuación algunos más importantes. En la práctica luego habrá problemas en los que se mezclen varios tipos de los descritos a continuación.

En todos estos problemas, las estrategias fundamentales pivotan en torno a:

- 1.º **Comprensión del enunciado** o correcta codificación de las proposiciones, es decir del estado inicial del problema.
- 2.º **Comprensión de la pregunta** o correcta codificación del estado final.
- 3.º **Correcta representación del espacio real del problema.** Se debe ayudar de una representación gráfica para comprender las operaciones a realizar y así poder pasar adecuadamente del estado inicial al estado final. Se trata, más que de ofrecer un conjunto de reglas o fórmulas a seguir, de enseñar estrategias mucho más genéricas, aplicables a muchas situaciones problemáticas diferentes.

TIPOS DE PROBLEMAS NUMÉRICO-VERBALES

- 1.º **Problemas de Cambio**, que si bien en sus formas más sencillas son muy simples para estos jóvenes, al utilizar formulaciones que, por ejemplo, requieran dos operaciones y pregunten por el estado inicial no son ya tan simples. En estos problemas se puede preguntar por el estado inicial, el final o el mismo cambio.
- 2.º **Problemas de Comparación** similares a los que suelen denominarse como de relaciones transitivas o series lineales de 3 o más términos. También se incluyen aquí aquellos en los que no se comparan cualidades sino cantidades específicas.
- 3.º **Problemas de Reducción a la Unidad**, que son muy corrientes en el currículum y que suponen una pequeña dificultad añadida a los de cuatro operaciones como es la de tener que pasar necesariamente por el cálculo de una unidad para luego generalmente multiplicar por la cantidad intensiva.
- 4.º **Problemas de Movimiento, Distancia**, en los que se requiere una representación más espacial e incluso una simulación de los movimientos efectuados para establecer adecuadamente el espacio del problema.
- 5.º **Problemas de Tablas de Doble Entrada**, que requieren cuantificar dos variables en un cuadro de doble entrada para poder completar la información desconocida a partir de los datos suministrados.

En cuarto lugar se presentan *problemas lógicos algo más novedosos para estimular el pensamiento creativo*. Estos problemas **exigen la utilización de determinadas estrategias** en su resolución en gran medida iguales a las de los anteriores problemas, aunque los planteamientos suelen ser más novedosos, menos similares a las tareas que se van a encontrar en sus procesos de aprendizaje curricular.

Algunos de estos problemas pueden también servir como retos curiosos al pensamiento creativo incentivando la búsqueda de caminos novedosos. Por ello su resolución, además de enseñar estas estrategias generales tiene también como finalidad el afianzar en el joven la **disposición positiva a abordarlos con confianza**. Esta disposición, en parte actitud, en parte habilidad estratégica, favorecerá el desarrollo de su pensamiento creativo que se pondrá en actividad ante situaciones problemáticas que lo demanden. Y para inculcar esta disposición-habilidad el clima estimulador del guía/profesor es variable esencial a tener en cuenta.

TIPOS DE ESTRATEGIAS A ENSEÑAR

1.º **Inferencia de una ley general.** Muchos problemas no llegan a comprenderse en profundidad y a extenderse a otros supuestos si no se logra, además de resolverlo específicamente, llegar a establecer una ley más general. En estos problemas muchas veces debemos analizar varios casos, desde los casos más simples, para observar y establecer una lógica general, tratando luego de aplicarla extendiendo o identificando todos los supuestos en los que se aplica.

2.º **Establecer subobjetivos.** La mayoría de los problemas difíciles son bastante complejos y requieren resolver pasos previos antes de llegar al estado final. Entonces hay que proponerse ir dando pasos que nos acerquen poco a poco al objetivo final. Incluso a veces debemos aparentemente alejarnos del objetivo (dar un rodeo), para finalmente poderlo abordar.

3.º **Trabajar marcha atrás.** Es una variante del anterior tipo de problemas, pero en estos avanzamos desde el estado final, para, paso a paso (subobjetivos) llegar al estado inicial. La razón estriba en que en este tipo de problemas el estado inicial es el más difícil de representar, o sencillamente es aquel por el que nos preguntan, dando sólo información del estado final.

4.º **Cambiar de perspectiva, no incluir en la representación del problema supuestos innecesarios.** A veces no resolvemos determinados problemas por la fijeza funcional, porque determinadas experiencias previas están condicionándolo de una manera determinada. Cambiar de perspectiva, evitar esos “prejuicios operativos” llevará a su verdadera resolución.

5.º **Representar una puesta en acción.** La estrategia general es la misma que para los problemas de movimiento/distancia ya descritos anteriormente.

6.º **Tanteo sistemático.** En estos problemas se deben agotar sistemáticamente las posibles combinaciones que admiten las variables en juego. Una de estas combinaciones será la que responde a los datos dados. A veces, y siempre que las combinaciones sean muchas, será mejor no ensayarlas todas sino realizar tanteos dirigidos para aproximarnos poco a poco al resultado deseado.

Nuestro deseo último al confeccionar este cuaderno es **lograr que el/la joven pase de una enseñanza formal de la aritmética**, enseñanza que va recibiendo en su etapa de educación primaria y por lo general bien asimilada, **a una más comprensiva**, sin que exista una disociación entre el aprendizaje de contenidos conceptuales y el desarrollo de los procedimientos (estrategias, habilidades)... No se pretende aplicar enseñanzas conceptuales o reglas de algún campo específico de las matemáticas, sino usar la lógica básica y la comprensión verbal significativa de los enunciados para aplicarla a la resolución de problemas. Y es que creemos que la enseñanza de procedimientos cada vez más complejos sin que los/as jóvenes comprendan los conceptos subyacentes pueden alejarlos/as poco a poco del interés natural que poseen hacia esta área del saber.



ALGUNAS NORMAS PARA USO DE ESTE CUADERNO

EL presente nivel de ESTRATEGIAS DE CÁLCULO Y PROBLEMAS NUMÉRICO-VERBALES del "PROGRESINT NIVEL 4" va dirigido a jóvenes que inician E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria). Puede asimismo utilizarse al final de la Educación Primaria, sobre todo con alumnos^{as} que hayan utilizado el cuaderno anterior o que tengan un buen nivel de desarrollo lógico/numérico y estén motivados trabajando estos procesos mentales.

Se sitúan los ejercicios en un nivel de abstracción adecuado al final del período "dimensional" e inicio del "vectorial" en la teoría neopiagetiana de Robbie Case. Se busca una complejidad mayor que la de los ejercicios suscitados en el NIVEL 3 del PROGRESINT, pues los jóvenes ya son capaces de trabajar con símbolos abstractos.

Quienes ya hayan utilizado el cuaderno 17 encontrarán mayor facilidad para seguir los ejercicios, por lo que se podrán agilizar muchas de las explicaciones. En caso contrario deberá seguirse un ritmo acorde con la marcha de la mayoría del grupo que realice estos ejercicios.

Los procesos que se ejercitan se consideran necesarios para el desarrollo del razonamiento lógico aplicado a los contenidos del área de matemáticas del currículum. Será muy útil que el^{la} profesor^a realice aplicaciones paralelas al currículum y que el alumno pueda extrapolar a la vida diaria.

En varias ocasiones, a lo largo del cuaderno, se intercalan ejercicios tipo RETO/AUTOEVALUACIÓN personal para, por un lado, animar a realizar algo que teóricamente suponga alguna dificultad y trabajo, y por otro, sirva al guía/educador para ir comprobando los progresos que van consiguiendo.

Al final del cuaderno se presentan las soluciones a algunos ejercicios o de reto/autoevaluable o considerados más complejos y difíciles. Sólo deberán consultarse tras un serio intento de solución propia. No se dan las soluciones a todos los ejercicios, por creerlo innecesario y por evitar un posible efecto negativo: que el alumno se acostumbre a mirar demasiado pronto las soluciones, sin esforzarse para encontrarlas por cuenta propia. El asesoramiento colectivo, imprescindible, debe sustituir a este modo de evaluación.

NORMAS GENERALES EN LA APLICACIÓN DEL PROGRESINT

La mera realización por parte del joven de los ejercicios contemplados en los ocho cuadernos del PROGRESINT NIVEL 4, o de alguno de ellos en particular, no nos asegura el que se hayan conseguido todos los objetivos propuestos ni en la profundidad adecuada para que luego sean transferibles a otras actuaciones. Por ello son necesarias algunas condiciones mínimas de ambientación por parte del guía para tener la confianza de verdaderas mejoras en la resolución de problemas. Entre ellas están:

1. Correcta ASIMILACIÓN POR PARTE DEL GUÍA/EDUCADOR DE LOS OBJETIVOS, a corto y medio plazo, de cada tipo de ejercicios, para poder ir comprobando si se va consiguiendo o no la adecuación de los objetivos a la marcha del grupo.
2. Correcta EXPLICACIÓN DE LOS FINES que se persiguen en cada tipo de ejercicios, para que el joven sepa exactamente qué es lo que tiene que hacer y vaya siendo consciente de los mejores procedimientos para lograrlo.
3. Adecuado CLIMA DE ESTIMULACIÓN para realizar los ejercicios, evitando el basado exclusivamente en éxitos o fracasos al azar. Se debe lograr progresivamente que la propia tarea sea interesante por sí misma, por el mero hecho de haber hecho un producto bien realizado, con un procedimiento adecuado. Ello requiere que se ayude más a algunos jóvenes más lentos.
4. ADECUADO DIÁLOGO del guía/educador, en unas ocasiones con el grupo de la clase, en otras con algún^a alumno^a en concreto, de manera que antes, durante y después de realizar los ejercicios vaya impartiendo constantes reorientaciones evaluativas, apreciaciones, refuerzos, ayudas...etc. Nunca se valorará lo suficiente el papel del guía/educador en este tipo de tareas.
5. EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS, analizando, no para insistir en los errores, sino para estimular una mejor producción y un diálogo constructivo permanente. Deberán tenerse en cuenta especialmente los retos para observar la marcha de cada alumno^a.

6. **CONSTANCIA Y MÉTODO** para progresar ordenadamente en los ejercicios. Es preferible una marcha colectiva a que cada joven vaya en un ejercicio diferente, porque de esta manera propiciamos los diálogos correctores al final de cada sesión, y una interacción más eficaz entre los^{as} mismos^{as} alumnos^{as} de la clase, aunque en casos específicos pueda ser necesaria una enseñanza más personalizada.

De la misma manera se necesitará emplear al menos dos períodos de tiempo o sesiones de trabajo a la semana, para lograr que los^{as} alumnos^{as} encuentren una continuidad suficiente para afianzar los aprendizajes que van realizando.

Estas condiciones mínimas son fácilmente asumibles por cualquier educador, sea el profesor, el psicólogo o el pedagogo quien haga esta función de guía. Por tanto no se necesita una formación especial para lograr un buen nivel de eficacia, sino más bien la atención necesaria para hacerlo adecuadamente, dedicando un cierto tiempo a la preparación y evaluación de la actividad. Por supuesto que vendría muy bien una formación más profunda relacionada con el desarrollo de los procesos intelectivos de resolución de problemas.



■ ESTRATEGIAS DE CÁLCULO

◆ La suma de los números de los cuadros inferiores debe dar 200. Encuentra el número que falta en el cuadro sombreado. Suma primero los números cuyo resultado sea múltiplo de 10. Trabaja todo mentalmente.

1.

36	41
	104

4.

55	
44	66

7.

64	53
	46

2.

55	45
49	

5.

	32
68	26

8.

	53
47	20

3.

72	
38	28

6.

64	27
	36

9.

72	
72	18

◆ Busca el número que falta en cada una de las series de sumas para obtener 200. Agrupa primero los dos cuya suma sea múltiplo de 10.

10. $69 + 47 + 51 + \square = 200$

11. $\square + 33 + 48 + 72 = 200$

12. $72 + \square + 62 + 28 = 200$

13. $66 + 27 + \square + 34 = 200$

14. $71 + 38 + 39 + \square = 200$

15. $35 + 41 + \square + 105 = 200$

16. $55 + \square + 44 + 76 = 200$

SERIES LÓGICAS NUMÉRICAS

En los círculos pon la fórmula que gobierna cada serie. Completa esas series de números.

Ejemplo:



■ PROBLEMAS DE CAMBIO

1. ♦ *Israel ha comprado 126,8 m. de alambrada, posteriormente 108,76 m. más. Si al final faltaron 3,65 m. para cercar la finca de su casa, ¿cuántos metros tenía la finca de perímetro?*

1. ¿Qué me preguntan?
(si no sabes lo que significa perímetro deberás buscar su significado en el diccionario)

2. Completa la gráfica con los datos numéricos de que dispones.

3. ¿Qué operación tienes que hacer?

4. Hazlas donde pone OPERACIONES y completa la gráfica con el nuevo dato.

5. Vuelve a leer el problema (enunciado) para COMPROBAR que el resultado es congruente con los datos.

6. RESPUESTA:

GRÁFICA

TENÍA	COMPRA	OPERACIONES
	COMPRA	
	FALTAN	

2. ♦ *Un pastor tenía 500 ovejas en su rebaño. Vendió los 3/5 del rebaño y compró posteriormente otro grupo de ovejas. Si ahora tiene 480 ovejas, ¿Cuántas vendió? ¿Cuántas compró?*

1. ¿Qué me preguntan?

2. Completa la gráfica con los datos numéricos de que dispones.

3. ¿Qué operación tienes que hacer?

4. Hazlas donde pone OPERACIONES y completa la gráfica con el nuevo dato.

5. Vuelve a leer el problema (enunciado) para COMPROBAR que el resultado es congruente con los datos.

6. RESPUESTA: 1.^a
2.^a

1.^a SITUACIÓN

2.^a SITUACIÓN

TENÍA	3/5	TIENE	QUEDÓ
	2/5		COMPRÓ

OPERACIONES

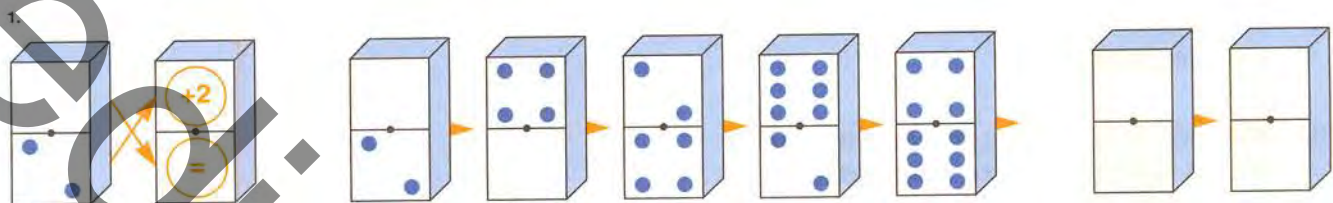
■ SERIES NUMÉRICAS CON FICHAS DE DOMINÓ

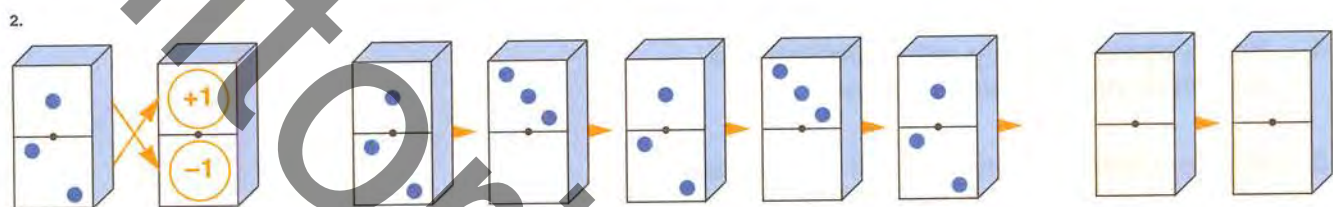
◆ *Completa las fichas de dominó, fijándote en la serie y su fórmula.
Recuerda que la ficha de dominó tiene entre cero y seis puntos.
En los últimos ejercicios completa también la fórmula.*

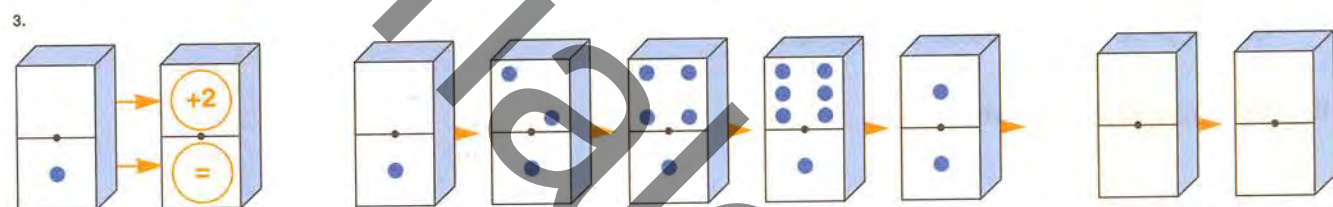
FÓRMULA

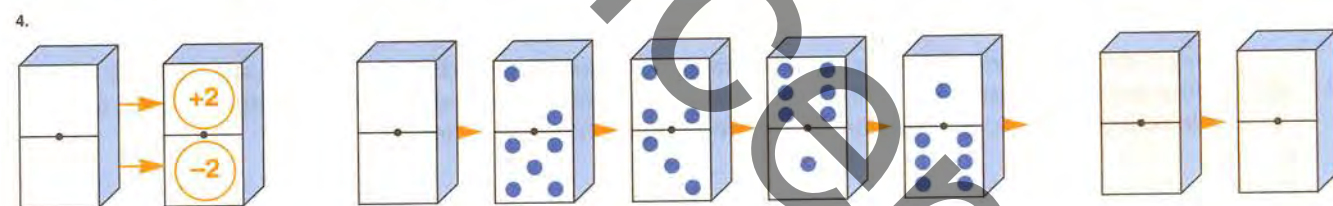
SERIE...

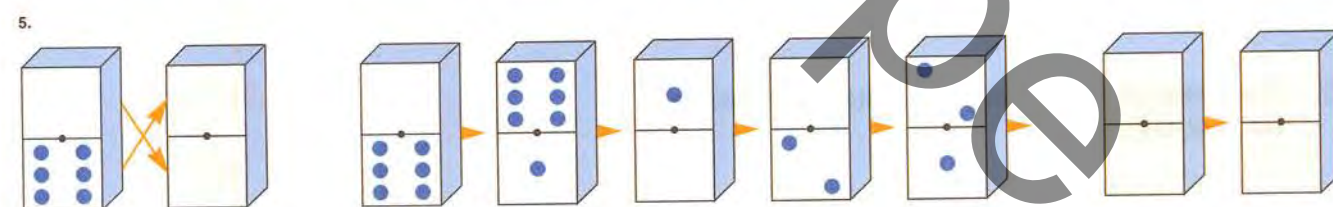
Completa...

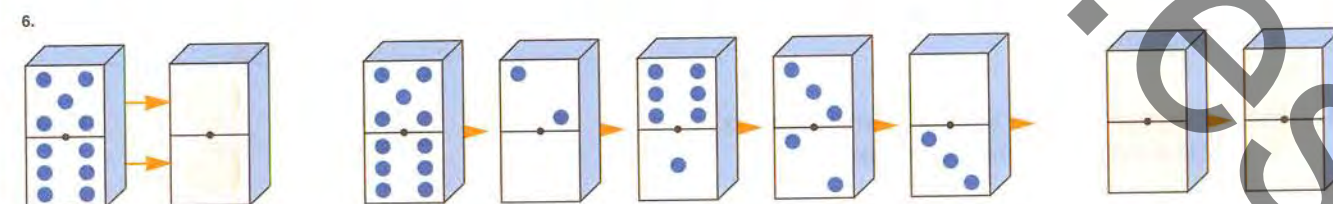
1. 

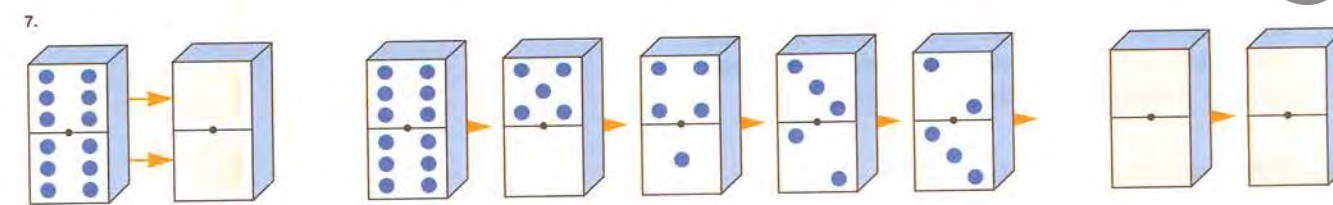
2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

■ PROBLEMAS DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

1. ♦ *Un tren de mercancías recorre 250 kms. en cuatro horas. ¿Cuántos kms. recorrerá en 12 horas a ese mismo promedio de velocidad?*

1. ¿Qué me preguntan?
2. Completa la gráfica con los datos numéricos de que dispones.
3. Mirando la gráfica, ¿qué operación/es tienes que hacer para responder a la pregunta?
4. Haz la operación/es y vete completando la gráfica con los nuevos datos.
5. Vuelve a leer el enunciado del problema para comprobar si los resultados que has obtenido son congruentes con los datos que el problema te daba inicialmente.
6. Pon aquí la respuesta:



OPERACIONES

--	--

2. ♦ *Marisa tiene una colección de posavasos de 630 modelos distintos. Le han costado 3.465 ptas. Jaime quiere empezar su colección y quiere calcular, al promedio de coste de Marisa. ¿Cuánto le habrá costado su colección cuando llegue a tener 715 modelos?*

1. ¿Qué me preguntan?
2. Completa la gráfica con los datos numéricos de que dispones.
3. Mirando la gráfica, ¿qué operación/es tienes que hacer para responder a la pregunta?
4. Haz la operación/es y vete completando la gráfica con los nuevos datos.
5. Vuelve a leer el enunciado del problema para comprobar si los resultados que has obtenido son congruentes con los datos que el problema te daba inicialmente.
6. Pon aquí la respuesta:

GRÁFICA

OPERACIONES

--	--

AUTOMATIZACIÓN DE CÁLCULO

◆ *Completa esas operaciones en serie. Realiza los cálculos mentalmente.*

1.

20

$\times 2$ $\times 3$ $\times 7$ $\times 5$ $: 10$
 $\times 3$ $\times 5$ $\times 7$ $\times 2$ $: 10$
 $\times 5$ $\times 2$ $\times 7$ $\times 3$ $: 10$
 $\times 7$ $\times 2$ $\times 3$ $\times 5$ $: 10$

2.

2,5

$\times 3$ $\times 4$ $: 2$ $\times 4$ $: 2$
 $\times 2$ $: 3$ $\times 4$ $\times 3$ $: 2$

3.

6

$\times 2$ $\times 3$ $\times 7$ $\times 6$ $: 2$
 $\times 3$ $\times 2$ $\times 7$ $\times 3$ $: 1$
 $\times 15$ $\times 7$ $\times 2$ $\times 3$ $: 5$
 $\times 7$ $\times 1$ $\times 3$ $\times 3$ $\times 2$

■ PROBLEMAS DE TABLAS DE DOBLE ENTRADA. Completar e inferir

1. ♦ *Juan, Pedro y Daniel tienen repartida en sus casas una colección de libros de historia, vida de animales y tebeos. Juan sólo tiene en su casa 3 libros de historia y tantos tebeos como Daniel. A Pedro, que sólo le gustan las vidas de los animales, tiene 12 libros de este tema. Daniel tiene 5 libros de historia, 18 tebeos y 2 vidas de animales. ¿De cuántos libros consta la colección de estos tres amigos?*

ESTRATEGIA: Realizar una tabla de doble entrada, por un lado, el nombre de los chicos, y por otro, el de clases de libros que tienen. El trabajo consistirá en rellenar las casillas y deducir los datos que se nos piden.

	JUAN	PEDRO	DANIEL	TOTALES
HISTORIA				
V. ANIMALES				
TEBEOS				

RESPUESTA:

2. ♦ *Tres vecinos, amigos de los animales, alardean de la cantidad que cada uno tiene. A Alicia no le gustan los pájaros, pero tiene 16 peces en el acuario, 2 gatitos y un pекinés. Antonio, en cambio, posee una enorme jaula con 6 parejas de canarios. También tiene 2 perritos. ¿Sabrías decirme cuántos animales tiene el tercer vecino, Felipe, sabiendo que entre los tres vecinos tienen un total de 48 animales y que 18 de ellos son pájaros, 24 son peces y 4 son perros? ¿Podrías decirme también cuántos gatos tienen en total los tres vecinos?*

ESTRATEGIA: Realizar una tabla de doble entrada, por un lado, el nombre de los vecinos, y por otro, el de clases de animales que poseen.

RESPUESTA: 1.^a

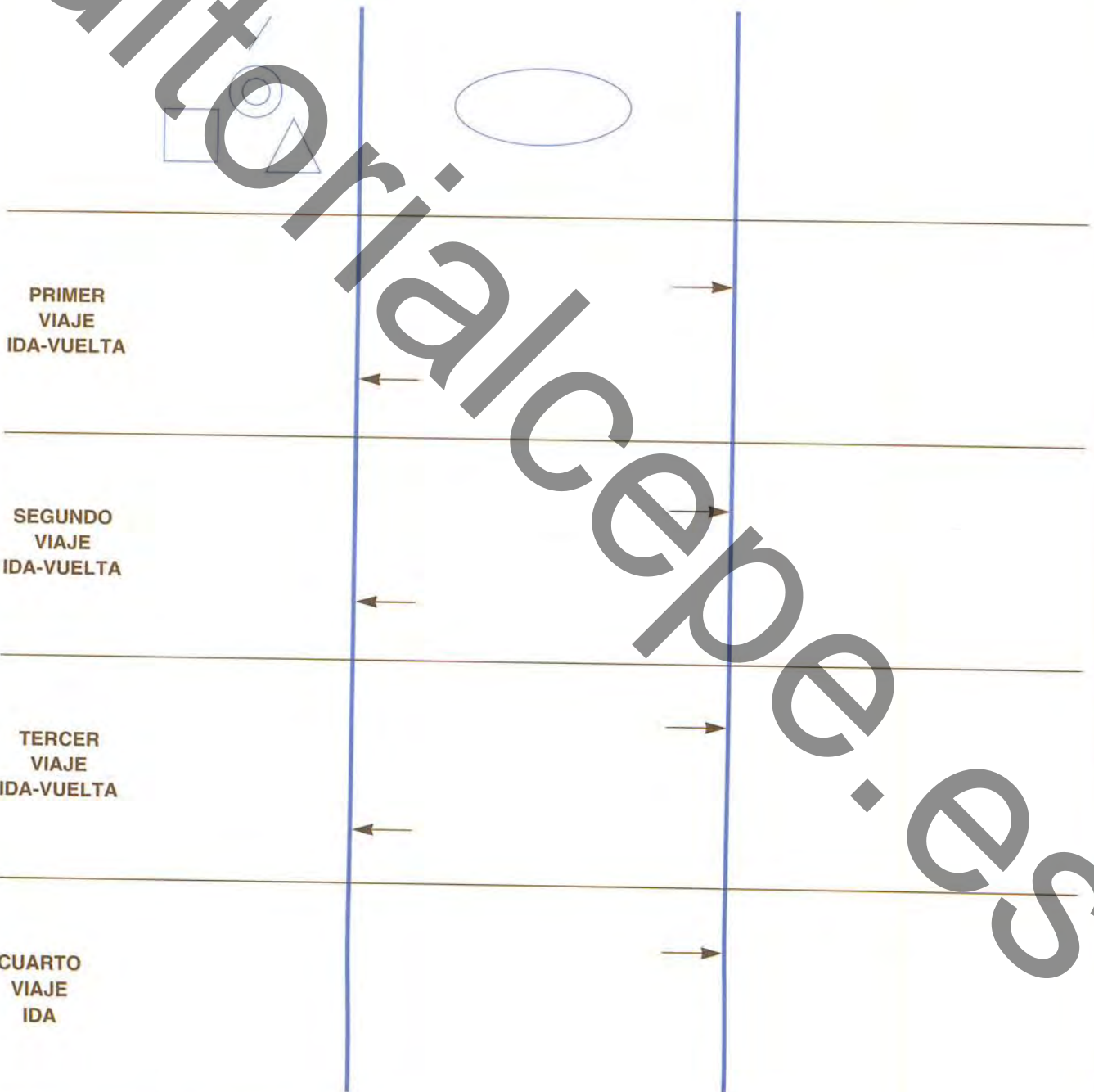
2.^a

■ PROBLEMAS LÓGICOS. Establecer subobjetivos

◆ *Un barquero quiere pasar de una orilla a otra del río. A su lado, su lobo, su oveja y su saco de coles, y en la barca sólo caben él y una de las tres cosas. El barquero sabe que si deja solos al lobo y a la oveja, esta segunda tendrá un mal final. Y que si deja a la oveja sola con el saco de coles no queda ni rastro de su contenido.*

¿Qué puede hacer el barquero para no perder ninguna de sus posesiones y cruzar el río?

ESTRATEGIA: Trabaja representando los movimientos a hacer, o representando una puesta en acción, con un dibujo lo más esquemático posible. Por ejemplo el río con dos líneas, el barquero por dos círculos, el lobo por un triángulo, el saco de coles por una raya y la oveja por un cuadradito y la barca por un óvalo.



• Comprueba la solución en la página 110.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO

La suma de los números de los cuadros inferiores debe dar 10. Encuentra el número que falta en el cuadro sombreado. Suma primero los números cuyo contenido sea número entero. Trabaja todo mentalmente.

1.

$11/2$	$51/2$
$23/4$	

ESTRATEGIA: Opera primero con las fracciones. Simplifica los resultados y luego suma los números enteros.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad 1 + 5 + 2 = 8 + 1 = 9 \frac{3}{4} \quad 10 = 9 \frac{4}{4}$$

Resultado $\frac{1}{4}$

2.

$11/3$	$24/3$
$42/3$	

4.

	$11/5$
$24/5$	$33/5$

6.

$11/7$	$24/7$
$33/7$	

3.

$23/4$	$11/4$
	$45/4$

5.

$21/6$	
$34/6$	$52/6$

7.

$31/6$	
$25/6$	$21/6$

Busca el número que falta en cada una de las series de sumas para obtener 10. Agrupa primero los dos cuya suma dé un número entero.

8. $31/3 + 21/4 + \quad + 12/3 = 10$

9. $21/3 + \quad + 34/3 + 22/3 = 10$

10. $\quad + 21/5 + 14/5 + 33/5 = 10$

11. $21/7 + \quad + 14/7 + 33/7 = 10$

12. $11/4 + 45/4 + \quad + 23/4 = 10$

13. $11/6 + 34/6 + 42/6 + \quad = 10$

14. $31/2 + \quad + 13/4 + 21/2 = 10$

COLECCIÓN

PROGRESINT

25

Editorial cepe.es



GENERAL PARDIÑAS, 95
TEL.: 562 65 24
28006-MADRID (ESPAÑA)
clientes@editorialcepe.es / www.editorialcepe.es



9 788478 691739